

# Elasticité des empilements granulaires proche de la transition de blocage. *Elasticity of granular packings close to Jamming.*

C. Coulais,<sup>1,2,3</sup> A. Seguin,<sup>1,2</sup> and O. Dauchot<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*SPHYNX/SPEC, CEA-Saclay, URA 2464 CNRS, 91191 Gif-sur-Yvette, France*

<sup>2</sup>*Université Paris-Sud, CNRS, Lab FAST, Bat 502, Campus Université, Orsay, F-91405, France*

<sup>3</sup>*Huygens-Kamerlingh Onnes Lab, Universiteit Leiden, PObox 9504, 2300 RA Leiden, The Netherlands*

<sup>4</sup>*EC2M, ESPCI-ParisTech, UMR Gulliver 7083 CNRS, 75005 Paris, France*

Nous nous intéressons à la réponse mécanique au cisaillement d'un milieu granulaire modèle bidimensionnel au-delà de la transition de blocage appelée aussi "jamming". Tout d'abord, nous développons le dispositif expérimental et nous combinons des techniques de suivi de particules et de photoélasticité afin de mesurer l'état de déformation et l'état de contrainte à l'échelle du grain. Ensuite, nous mettons en place un intrus capable d'extension radiale (un "ballon" 2D) afin de pouvoir cisailer l'empilement granulaire tout en conservant une géométrie axisymétrique. Nous sondons l'apparition des contraintes à l'échelle du grain pour des amplitudes de déformation inférieures à  $10^{-2}$  et pour une gamme de fraction volumique évoluant de 2% de part et d'autre de la transition de blocage. Nous montrons ainsi que cette réponse mécanique induit des contraintes de cisaillement mais aussi des contraintes normales. De plus, nous identifions un régime élastique où les contraintes normales et les contraintes de cisaillement évoluent non-linéairement avec la déformation de cisaillement. Enfin, nous explicitons la relation entre l'apparition de cette non-linéarité et la transition de blocage et nous déterminons les relations constitutives de l'empilement.

*We investigate experimentally the mechanical response to shear of a 2D packing of grains across the jamming transition. First, we develop a dedicated experimental setup, together with tracking and photoelastic techniques in order to prepare the packing in a controlled fashion and to quantify the stress and strain tensors at the grain scale. Second, we install a inflating probe (a 2D "balloon"), which shears the packing with a cylindrical symmetry. We probe experimentally stresses and strains for strain amplitudes as low as  $10^{-3}$  and for a range of packing fractions within 2% variation around the jamming transition. We observe not only that shear strain induces shear stresses, but also normal stresses. Moreover, we show that both shear and normal stresses behave nonlinearly with the shear strain. Finally, we show by scaling analysis that the constitutive laws are controlled by the Jamming transition.*

PACS numbers: 45.70.-n 83.80.Fg

## I. INTRODUCTION

Comprendre les propriétés mécaniques des empilements denses de particules athermiques telles que les grains, les mousses ou bien encore les émulsions demeure un défi aussi conceptuel que pratique. Les fluctuations, le désordre et l'anisotropie contrôlent la mécanique de ces systèmes et contrecarrent la plupart des tentatives de détermination des lois constitutives de ces matériaux. Un progrès considérable a été effectué lors de l'introduction d'un modèle simple de sphères molles non frottantes, contenant ainsi un degré minimal de complication. Dans ce modèle, un empilement rigide de particules compressées les unes contre les autres perd sa stabilité mécanique lorsque la fraction d'empilement  $\phi$  décroît, en dessous d'une fraction particulière  $\phi = \phi_J$ , qui dépend du protocole de préparation de cet empilement et de la taille du système [1]. À ce point particulier, la pression de confinement tend vers 0 et les déformations des particules disparaissent [2–5]. Les modules élastiques se comportent en lois d'échelles avec la distance à ce point. Lorsque l'on approche cette transition, le matériau devient alors fragile [6] et sa réponse linéaire est dominée par les fluctuations à basses énergies [7]. Des travaux antérieurs sondant les propriétés mécaniques des empilements de grains

mettaient en avant que la friction [8] et les chaînes de forces [9, 10] sont à l'origine la nature solide de l'empilement. Récemment, de nombreux efforts théoriques ont montré que la nature marginale de la transition de blocage est l'ingrédient essentiel à l'origine des comportements non triviaux de la structure de l'empilement et de ses propriétés mécaniques et dynamiques [11, 12]. Il s'agit de savoir si les mêmes comportements apparaissent dans les systèmes réels. Plusieurs campagnes expérimentales menées au-delà de la transition de blocage, ont caractérisé les propriétés structurelles et dynamiques des systèmes granulaires [13–15], des mousses [16] et des émulsions [17]. Il existe aussi quelques études qui ont déterminé la rhéologie sous la transition de blocage dans des expériences de grains vibrés [18, 19], de mousses [20], et d'émulsions [21, 22]. Cependant le lien direct avec la transition de blocage n'est pas clairement établi. En particulier, la pertinence de la réponse linéaire proche de la transition reste au centre des débats [23–25]. Pour une déformation de cisaillement finie  $\gamma$ , les effets non-linéaires deviennent prédominants [26–28] et la réponse mécanique du système n'est plus uniquement décrite par la géométrie de l'empilement. Enfin, dans le cas des expériences avec des grains, les études numériques et théoriques de sphères molles ignorent systématiquement

les effets de dilatance, c'est à dire l'accroissement de volume ou de pression sous une déformation de cisaillement [29–31].

Dans cet article, qui présente le détail d'une lettre publiée récemment [32], nous présentons la première mesure expérimentale de la réponse élastique d'un empilement 2D de grains à travers la transition de blocage. Nous appliquons une déformation de cisaillement inhomogène en gonflant un intrus au centre d'une couche bi-disperse de grains frottants. Nous déterminons le champ de déplacement des grains et le réseau de forces de contact à partir de mesures photoélastiques et des techniques de suivi de particules, et nous calculons le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes à l'échelle du grain. Les relations constitutives obtenues à partir des courbes paramétriques des invariants de ces deux tenseurs montrent que l'élasticité linéaire ne s'applique pas. La dilatance est essentielle et, au-delà du blocage, une atténuation de la variation de contrainte de cisaillement se produit pour de faibles déformations. L'élasticité linéaire est retrouvée pour de grandes déformations, à partir d'une déformation critique  $\gamma_c$ , qui évolue avec la distance au blocage et qui disparaît à  $\phi_J$ . Nous recalculons enfin les profils de déformations issus des relations constitutives et nous montrons qu'ils correspondent aux profils expérimentaux.

## II. DIPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET PROTOCOLE

Le dispositif est adapté de celui utilisé par [14, 15]. Une couche bi-disperse de 8166 disques photoélastiques de diamètre 4 et 5 mm est confinée dans une cellule rectangulaire. Un des murs est un piston mobile qui permet de contrôler précisément la fraction surfacique  $\phi$ . Les grains reposent sur une plaque en verre qui peut être vibrée à une amplitude de 1 cm à une fréquence de 10 Hz perpendiculairement à la direction du piston. L'intrus gonflable est une entretoise en bronze, équipée de 9 pistons radiaux, entourée d'un joint torique de diamètre  $2r_I = 26.3$  mm et connectée au réseau d'air comprimé. Lorsque la pression d'air augmente dans l'intrus, les pistons radiaux viennent appuyer sur le joint torique, assurant une déformation radiale uniforme, jusqu'à  $2(r_I + a) = 28.5$  mm. Quand l'alimentation en air est coupée, l'élasticité du joint torique permet à celui-ci de reprendre sa forme initiale. Le taux de dilatation de l'intrus est  $a^* = a/r_I \in [1 - 10]\%$ . La spécificité de ce chargement localisé réside dans le fait qu'il sollicite le milieu granulaire selon une compression radiale par rapport au centre de l'intrus mais aussi selon une extension orthoradiale.

En variant l'amplitude de la sollicitation et la fraction volumique d'empilement, nous enregistrons la réponse mécanique selon un protocole précis. Tout d'abord, nous introduisons l'intrus au centre de l'empilement à la fraction d'empilement la plus basse. Ensuite, nous

comprimons l'empilement à l'aide du piston mural jusqu'à un état fortement bloqué de l'empilement tout en vibrant la plaque inférieure (se référer à [15] pour des détails supplémentaires). Nous arrêtons alors la vibration et commençons l'acquisition des images tout

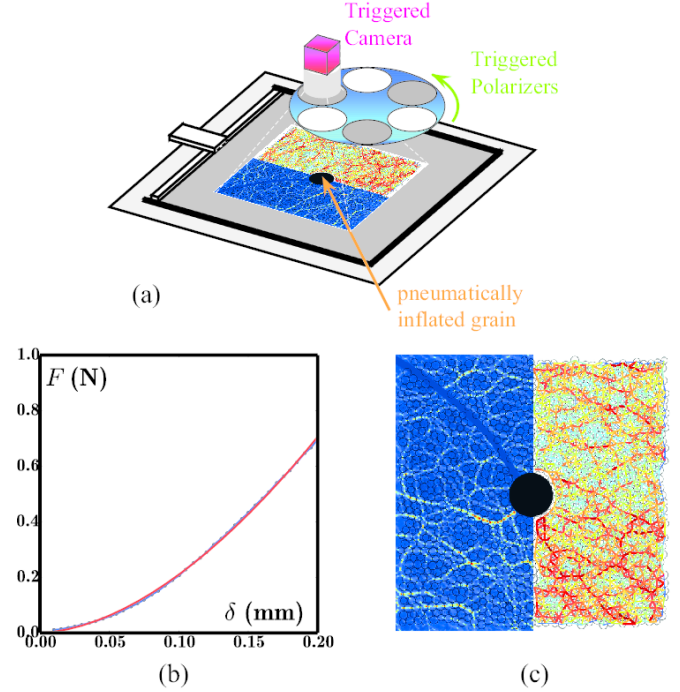


FIGURE 1. **Dispositif Expérimental.** (a) 8166 disques photoélastiques sont confinés dans un cadre rectangulaire, dont la surface est contrôlée par un piston latéral. Au centre, un "ballon" 2D est gonflé par un dispositif pneumatique, ce qui permet de créer un cisaillement inhomogène au sein de l'assemblée. La plaque inférieure (gris clair) sur laquelle reposent les grains peut vibrer horizontalement et est utilisée pour homogénéiser l'assemblée entre les différents tests. (b) Test de compression uni-axiale sur un seul grain, les données brutes (ronds bleus) correspondent à la force  $F$  (N) en fonction du déplacement  $\delta$  (mm) et un ajustement (ligne rouge pleine) de la forme  $F = A\delta^b$ , avec  $A = 13.0 \pm 1.0$  et  $b = 1.8 \pm 0.1$ . (c) Photo de (gauche) données brutes entre polariseurs croisés et (droite) d'une reconstruction de l'assemblée de grains et du réseau de forces. La taille et la couleur des liens correspondent à l'intensité de la force normale entre chaque grain.

**Experimental Setup.** (a) 8166 photoelastic disks are confined in a rectangular frame, whose surface is tuned by a side piston. At the center, a 2D "balloon" is inflated pneumatically, thus inducing an inhomogeneous shear in the packing. The bottom plate (light gray), on which rest the grains, can be vibrated horizontally and is used to homogenize the packing between the different mechanical tests. (b) Uniaxial compression test on a single grain. The raw data (blue disks) indicates the force-displacement curve. The red solid line corresponds to a fit to  $F = A\delta^b$ , with  $A = 13.0 \pm 1.0$  and  $b = 1.8 \pm 0.1$ . (c) Picture of (left) the raw cross-polarized pictures and of (right) the reconstructed grain packing and force network. The width and color of the links correspond to the intensity of the normal force between two grains.

en augmentant la taille de l'intrus par pas de 1.5% environ. À la fin, nous laissons l'intrus reprendre sa taille initiale, réenclenchons la vibration, puis décomprimons légèrement l'empilement et recommençons le cycle de mesure. La vibration permet de ré-homogénéiser l'état de contrainte dans l'empilement pendant les changements de fraction volumique, tout en maintenant une structure d'empilement identique [14, 15].

Le processus de calibration des grains photoélastiques se fait indépendamment via un essai de compression uni-axiale en utilisant une machine de traction uni-axiale (Instron 5965) équipée d'une cellule d'effort de 100 N. Nous observons que la courbe d'essai est non-linéaire, avec un exposant  $b = 1.8 \pm 0.1$  (Fig. 1b), ce qui est cohérent avec des études précédentes [33]. En revanche, ce résultat est en désaccord avec la théorie du contact idéal [34], qui prédit une loi de contact linéaire avec une raideur de  $k = 1$  N/mm pour notre système. Dans la suite, on normalisera les tenseur de contraintes 2D par cette raideur.

Les grains photoélastiques sont éclairés par le dessous de la cellule avec une large source de lumière polarisée et uniforme (PHLOX). Les images sont enregistrées à l'aide d'une caméra CCD haute résolution ( $2048 \times 2048$  pixels), conduisant à une résolution spatiale de  $100\mu\text{m}$ . L'acquisition de l'information des positions des grains et du signal photoélastique est réalisée à l'aide d'une roue, équipée alternativement d'un polariseur croisé, montée sur un moteur pas-à-pas (se référer à [15, 35] pour plus de détails). De ces images, nous extrayons les positions des grains, que nous pouvons suivre pour obtenir leurs trajectoires. Ensuite, nous utilisons le champ de positions des grains pour construire la triangulation de Delaunay et la tessellation de Voronoï que nous combinons avec le signal photoélastique (Fig. 1c gauche) afin d'estimer les forces normales et tangentielles entre les grains (Fig. 1c droite). Nous avons alors accès à un certain nombre d'observables à l'échelle du grain, telles que le nombre de contacts qu'un grain possède avec ses voisins ainsi que les tenseurs des déformations et des contraintes. Dans la suite, nous nous concentrons sur le nombre de contact, l'état de contrainte et l'état de déformation qui sont des paramètres pertinents pour obtenir le comportement macroscopique de l'empilement.

### III. ÉTAT DE CONTRAINTE ET ÉTAT DE DÉFORMATION À L'ÉCHELLE DU GRAIN

À partir du champ de déplacement  $\mathbf{U}$  des grains, nous calculons le tenseur des déformations  $\epsilon$  à l'échelle du grain [36–38]. Pour cela, nous évaluons le tenseur des déformations à partir du champ de déplacements des grains voisins. Cette formulation permet d'éviter d'effectuer un calcul par différences finies [38]. Les composantes du tenseur de déformation sont estimées à partir du champ de déplacement  $\mathbf{U}$  du grain  $i$  et des normales

aux cotés de sa cellule de Voronoï  $S$ , définies par sa position par rapport à ses voisins (Fig. 2a). Ainsi, le gradient moyen du champ de déplacement de  $\mathbf{U}$  correspondant au grain  $i$  dans  $S$  peut être défini par :

$$\langle \nabla \mathbf{U} \rangle = \frac{1}{S} \iint_S \nabla \mathbf{U} dS. \quad (1)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\langle \nabla \mathbf{U} \rangle = \frac{1}{S} \oint_L \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} dL, \quad (2)$$

où  $L$  est l'arête correspondant à la cellule de Voronoï et  $\mathbf{k}$  est la normale sortante de cette arête (Fig. 2a). En faisant l'hypothèse que la cellule de Voronoï est un polygone, on trouve

$$\langle \nabla \mathbf{U} \rangle = \frac{2}{R} \sum_L \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}, \quad (3)$$

où  $R$  est le rayon du grain  $i$  considéré. Le tenseur des déformations  $\epsilon$  correspond à la partie symétrique de ce gradient du champ de déplacement :

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\langle \nabla \mathbf{U} \rangle + \langle \nabla \mathbf{U} \rangle^\dagger). \quad (4)$$

Le principal atout de cette méthode est de ne pas utiliser de différences finies, ce qui réduit considérablement le bruit du calcul.

Pour calculer le tenseur des contraintes  $\sigma$  à l'échelle du grain  $i$ , nous combinons la tessellation et les forces

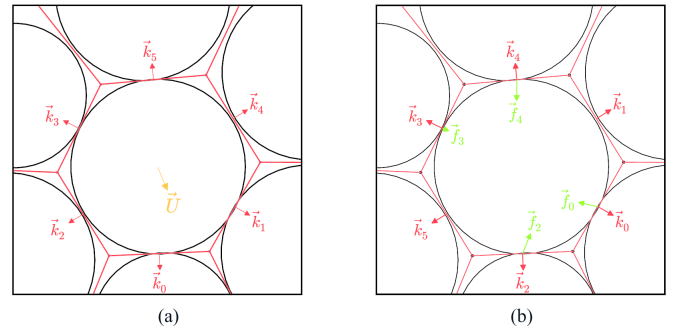


FIGURE 2. **Détermination des tenseurs de contrainte et de déformation.** (a) Le grain central a un déplacement  $\vec{U}$  et les cotés de sa cellule de Voronoï (en rouge) sont définis par les vecteurs  $\vec{k}_i$ . La somme du produit tensoriel de  $\vec{U}$  avec  $\vec{k}_i$  donne ainsi le gradient de déplacement. (b) Pour le tenseur des contraintes, les vecteurs  $\vec{k}_i$  sont combinés avec les forces de contact  $\vec{f}_i$  (en vert).

**Measurement of the stress and strain tensors.** (a) The inner grain has a displacement  $\vec{U}$  and the edges of its Voronoï cell (in red) are defined by the vectors  $\vec{k}_i$ . The sum of the tensorial product between  $\vec{U}$  and  $\vec{k}_i$  is the displacement gradient. (b) As for the stress tensor, the vectors  $\vec{k}_i$  are combined with the contact forces  $\vec{f}_i$  (in green).

d'interactions du grains  $i$  avec ses voisins selon [30, 36] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{S} \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{f}_{ij}, \quad (5)$$

où  $\mathbf{f}_{ij}$  est la force de contact entre le grain  $i$  et un de ses voisins  $j$  tandis que  $\mathbf{r}_{ij}$  est le rayon vecteur orienté du centre du grain  $i$  vers le centre du grain  $j$  (Fig. 2b).

Après avoir vérifié que ces tenseurs partagent les mêmes vecteurs propres [39], nous restreignons l'analyse au premier et second invariants de chaque tenseur. Ainsi, la dilatation est définie par

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_k \epsilon_{kk}, \quad (6)$$

la pression est définie par

$$P = -\frac{1}{2} \sum_k \sigma_{kk}, \quad (7)$$

la déformation de cisaillement est définie par

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{i,j} (\epsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij})^2}, \quad (8)$$

et la contrainte de cisaillement est définie par

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{i,j} (\sigma_{ij} + P \delta_{ij})^2}, \quad (9)$$

où  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker. Dans la suite,  $P$  et  $\tau$  sont normalisés par la raideur du contact  $k = 1 \text{ N/mm}$  et l'unité de longueur est le diamètre des petits grains  $s = 4 \text{ mm}$ . Le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont respectivement mesurés avec une résolution de  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ .

#### IV. ÉTAT DE L'EMPILEMENT NON SOLLICITÉ

Pour chaque fraction d'empilement, avant le gonflement de l'intrus, le système est caractérisé par un état initial, avec des chaînes de force se répartissant dans l'ensemble du matériau. La particularité de l'empilement bloqué réside dans le fait que toutes les forces sont répulsives, la rigidité de l'assemblée étant donnée par une pression de confinement. Un tel état bloqué, qui a auparavant été étudié en détail [15], est statistiquement homogène. Le nombre de contact moyen  $z_0$  est essentiellement constant pour les faibles fractions surfaciques (Fig. 3a). Aux fractions surfaciques moyennes, il présente une singularité à partir de laquelle il augmente non-linéairement. On identifie cette singularité avec la transition de blocage à la fraction surfacique  $\phi_J = 0.8251 \pm 0.0009$ . Il n'est pas surprenant d'observer une valeur non nulle  $z_0$  sous  $\phi_J$  : quand la vibration est arrêtée, la structure est figée brutalement et des

forces résiduelles demeurent à cause de la friction entre les grains et la paroi inférieure. La croissance non-linéaire de  $z_0$  avec  $\phi$  est compatible avec celle obtenus dans les simulations de particules frottantes [16, 40] et a pour origine le désordre géométrique de ce type d'empilement [3, 11].

La pression initiale  $P_0$  augmente aussi au-delà du blocage à partir d'une pression résiduelle sous  $\phi_J$ , qui comme pour  $z_0$ , est due au figeage de la structure (Fig. 3b). Nous comprimons l'empilement de manière non isotrope, en déplaçant uniquement le piston mural. Malgré nos efforts pour préparer le matériau avec autant de précaution que faire se peut [14, 15], en utilisant un protocole de compactification logarithmique sur une journée, l'empilement conserve de l'anisotropie clairement mis en évidence par l'existence d'une contrainte de cisaillement résiduelle  $\tau_0$  proportionnelle à la pression  $P_0$  (Fig. 3b). Cependant, le rapport  $\tau_0/P_0 < 1$ , ce qui est attendu pour les empilements où la contrainte de compression domine. Dans notre système, la sollicitation localisée est axi-symétrique. Par conséquent, de telles fluctuations anisotropes [41] sont moyennées et notre mesure est robuste face à l'anisotropie. Il est à noter que la plupart des empilements préparés numériquement présentent aussi des contraintes de cisaillement résiduelles et une forte anisotropie [41, 42].

#### V. RÉPONSE AU GONFLEMENT

Dans un premier temps, nous allons étudier le réseau de contact lors du gonflement de l'intrus. La figure 4 présente le changement de contact dans ce réseau pendant la phase de compression. On remarque que ce changement de contact concerne plusieurs grains, répartis de

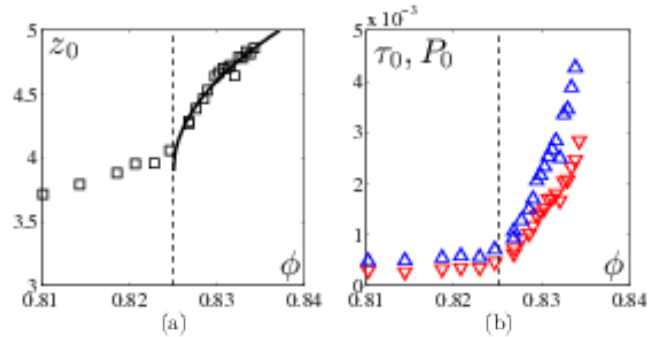


FIGURE 3. **État de contrainte initial** (extraite de [32]). (a) Nombre moyen de contact initial  $z_0$  ( $\square$ ); (b), pression  $P_0$  ( $\triangle$ ) et contrainte de cisaillement  $\tau_0$  ( $\nabla$ ) en fonction de la fraction surfacique  $\phi$ . La ligne noire est un ajustement à la fonction  $z_0 = z_p(\phi - \phi_J)^{0.5} + z_J$ , avec  $\phi_J = 0.8251 \pm 0.0009$ ,  $z_p = 10.0 \pm 0.5$ , et  $z_J = 3.9 \pm 0.1$ . La ligne en pointillés indique  $\phi_J$ .

**Initial stress state** (adapted from [32]). (a) Initial average contact number  $z_0$  ( $\square$ ); (b), pressure  $P_0$  ( $\triangle$ ) and shear stress  $\tau_0$  ( $\nabla$ ) vs. packing fraction  $\phi$ . The black line is a fit to  $z_0 = z_p(\phi - \phi_J)^{0.5} + z_J$ , with  $\phi_J = 0.8251 \pm 0.0009$ ,  $z_p = 10.0 \pm 0.5$ , and  $z_J = 3.9 \pm 0.1$ . The dash line indicates  $\phi_J$ .



manière homogène dans l'empilement (fig. 4a). Ceci est d'autant plus remarquable que la sollicitation elle-même n'engendre pas une déformation homogène de l'empilement : le déplacement des grains est d'autant plus faible que l'on s'éloigne du centre de l'intrus (fig. 4b).

Ceci suggère fortement que la réponse mécanique est dominée par le désordre. Le nombre de changement de contact moyen par grain  $\Delta z$  croît linéairement avec le paramètre de dilatation  $a^*$  (Fig. 4c), avec une pente positive qui dépend de  $\phi$ . Donc, lors du gonflement de l'intrus et du cisaillement de la structure, des contacts sont en moyenne créés, ce qui est en accord avec le fait que la surface totale occupée par les grains diminue, mais sans aucune structure spatiale ni corrélation avec le forçage

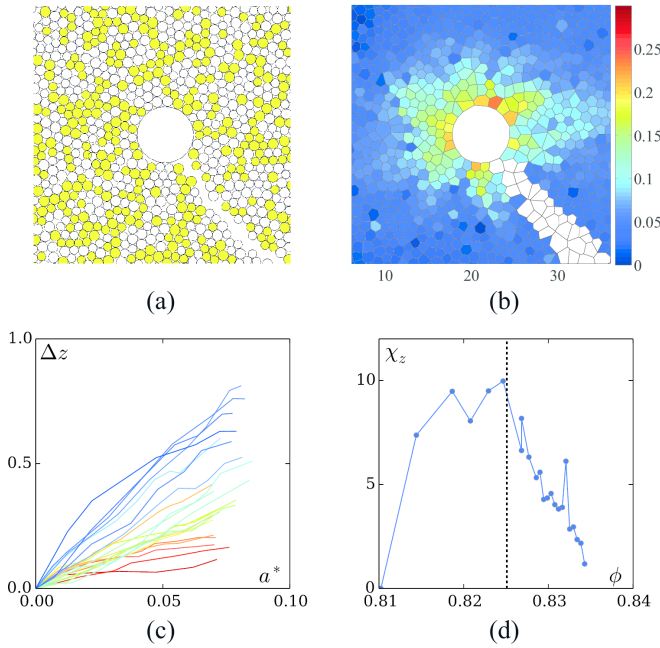


FIGURE 4. **Augmentation du nombre de contacts.** Cartographies (a) des changements du nombre de contacts et (b) des déplacements radiaux  $u_r$  pour  $\phi = 0.8294$  et  $a^* = 4.4\%$ . Chaque grain coloré en jaune a gagné ou perdu au moins un contact. Les grains sans couleurs sont masqués par le tube pneumatique qui alimente l'intrus en air comprimé. (c) : Différence du nombre de contact moyen avec l'état initial,  $\Delta z$  en fonction du paramètre de gonflement  $a^* = \frac{a}{R_0}$  pour différentes fractions surfaciques. Le code couleurs s'échelonne de bleu pour les faibles fractions surfaciques à rouge pour les grandes fractions surfaciques. (d) : Pente  $\chi_z$  de la courbe  $\Delta z$ - $a^*$  en fonction de la fraction surfacique,  $\phi$ .

**Increase of contact number.** Maps (a) of contact changes and (b) of radial displacements  $u_r$  for  $\phi = 0.8294$  and  $a^* = 4.4\%$ . The yellow grains have lost or gained at least one contact. The uncolored grains sit below the pneumatic tube connected to the intruder, which masks the field of view. (c) Difference between the average contact number with the initial state,  $\Delta z$  vs. the inflation parameter  $a^* = \frac{a}{R_0}$  for various packing fractions. Color code spans from blue to red with increasing packing fractions. (d) Slope  $\chi_z$  of the  $\Delta z$ - $a^*$  curve vs. the packing fraction,  $\phi$ .

mécanique. Nous modélisons cet accroissement par une fonction linéaire et nous reportons la pente  $\chi_z$  dans la figure 4d en fonction de  $\phi$ . Premièrement,  $\chi_z$  est toujours strictement positif. Cela suggère que de l'énergie pourrait être dissipée lors d'un tel processus et que des effets non-linéaires sont attendus. Ensuite, la courbe présente un maximum précisément à  $\phi_J$ , qui est la fraction volumique de blocage.  $\phi_J$  joue donc un rôle précis dans la réponse mécanique de l'empilement. De telles observations pourraient fournir de précieux indices pour la formulation d'un modèle micro-mécanique.

Dans la suite, nous allons considérer une formulation plus classique des tenseurs de contraintes et de déformations en utilisant leurs invariants. Nous allons considérer l'excès de pression  $P$  et de contrainte de cisaillement  $\tau$  par rapport à l'état de contrainte initial pour l'ensemble des  $a^*$  et  $\phi$  mesurés. Le comportement d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope classique a une relation linéaire entre l'état de contrainte et l'état de déformation, ce qui peut s'exprimer grâce aux relations  $P = -K\varepsilon$  et  $\tau = 2G\gamma$ , où  $K$  et  $G$  sont respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement. Dans l'hypothèse d'une géométrie 2D axisymétrique, l'intégration de l'équation d'équilibre conduit à  $\tau \sim G\gamma \sim a^*/r^2$ , où  $r$  est la variable d'espace : la contrainte de cisaillement diminue avec la distance au centre de l'intrus. En revanche, la pression  $P \sim 1$  ne dépend pas de l'espace. Ainsi, dans cette formulation, le forçage localisé induit des déformations volumiques et cisailantes.

Nous montrons en figure 5 les quatre cartes typiques des invariants pour une fraction d'empilement  $\phi = 0.8294$  supérieure à  $\phi_J$  et un taux de dilatation  $a^*$  ( $4.4 \times 10^{-2}$ ). Nous observons de fortes fluctuations spatiales et la réponse s'écarte de la réponse linéaire élastique précisée plus tôt. Cet écart est inhérent aux inhomogénéités présentes dans les matériaux désordonnés. Cependant, en considérant des échelles de longueurs plus grandes, on observe que l'axisymétrie du chargement est globalement respectée et que l'intensité de la réponse décroît avec la distance au centre de l'intrus. On peut ainsi faire l'hypothèse que notre cellule est suffisamment grande pour ne pas sentir les effets de confinement. Proche de l'intrus, une importante dilatation se produit à cause de la condition limite imposée par l'intrus lui-même. Etant donné que l'intrus possède un diamètre plus important que celui des grains, la variation de fraction surfacique localisée due au gonflement reste singulière par rapport à la fraction surfacique moyenne. Le reste de l'empilement présente de large fluctuations (avec ici un écart type de  $3 \times 10^{-3}$ ) avec un léger accroissement de la fraction surfacique (d'amplitude  $6 \times 10^{-5}$ ) (Fig. 5a), assurant la conservation globale du volume.

Par conséquent, en dehors de la première couronne de grains autour de l'intrus, que nous allons exclure de l'analyse, le matériau peut être considéré comme incompressible. Nous postulons donc dans la suite que  $\varepsilon = 0$ . Ainsi, la sollicitation mécanique se révèle plutôt être

une déformation cisailante pure. La deuxième observation importante montre un écart significatif à la réponse élastique linéaire : le champ de pression est inhomogène et diminue à mesure que l'on s'écarte du centre de l'intrus. Comme ce champ de pression ne correspond pas à des variations sensibles de volume, il est nécessairement induit par la déformation de cisaillement. Cet effet est la manifestation de la présence de dilatance dans un système à volume constant, un effet bien connu dans les milieux granulaires [29]. Le coefficient de dilatance à pression constante est défini par  $P = R\gamma^2$ , et lié à celui défini à volume constant  $D$  par le module de compressibilité  $K$  tel que  $R = DK$  [43].

Finalement, tandis que la pression  $P$  (moyennée orthoradialement) évolue linéairement avec  $a^*$  (Fig. 6a), la déformation de cisaillement  $\gamma$  (moyennée orthoradialement) croît plus vite avec  $a^*$  (Fig. 6b). C'est une indication de la nature non-linéaire du matériau. En revanche, le travail des efforts de cisaillement  $\tau\gamma$  évolue en  $a^{*2}$  (Fig. 6d), ce qui suggère que la réponse mécanique du milieu granulaire à la sollicitation est dominée par des déformations élastiques. Ainsi, malgré le changement significatif de contacts dans l'empilement, il n'y a essentiellement pas de dissipation de l'énergie. Ces observations sont valables pour l'ensemble des fractions surfaciques

considérées.

## VI. RELATIONS CONSTITUTIVES

Nous détaillons à présent l'analyse quantitative des relations de comportement entre les invariants  $\tau$ ,  $P$  et  $\gamma$ . Nous rassemblons l'ensemble des données moyennées orthoradialement  $P(r, a^*)$  et  $\tau(r, a^*)$  en fonction de  $\gamma(r, a^*)$ , où  $r$  est la distance au centre de l'intrus. Les figures 7a et b montrent la contrainte de cisaillement et la pression en fonction de la déformation de cisaillement  $\gamma$  pour différentes fractions surfaciques  $\phi$ . Sous  $\phi_J$ , la pression  $P$  et la contrainte de cisaillement  $\tau$  présentent la dépendance attendue avec la déformation de cisaillement  $\gamma$  :  $\tau = 2G_0\gamma$  et  $P = R_0\gamma^2$ , où  $G_0$  et  $R_0$  ne dépendent pas de  $\phi$ . Au dessus de  $\phi_J$ , des non-linéarités apparaissent sous la forme d'une diminution de la variation de  $\tau$  et  $P$  avec  $\gamma$ . La transition de blocage joue un rôle essentiel et nous l'utilisons pour décrire nos données avec un unique jeu de paramètres définis par

$$P = [R_0 + R_{nl}(\Delta\phi, \gamma)] \gamma^2 \quad (10)$$

$$\tau = 2[G_0 + G_{nl}(\Delta\phi, \gamma)] \gamma \quad (11)$$

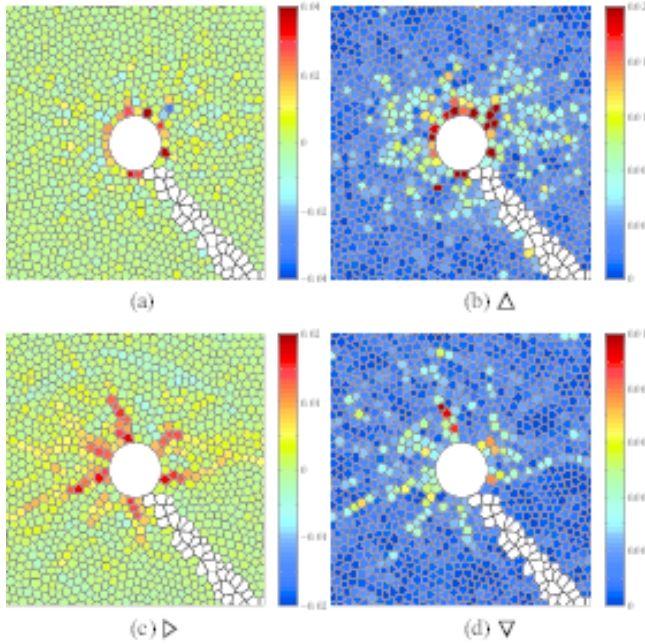


FIGURE 5. **Cartographies des invariants des déformations et des contraintes** (extraite de [32]). Cartographies de la dilatation,  $\varepsilon$ , (a), cisaillement,  $\gamma$ , (b), pression,  $P$ , (c) et contrainte de cisaillement,  $\tau$ , (d), pour  $\phi = 0.8294$  et  $a^* = 4.4 \times 10^{-2}$ . Les images représentées ici ne représentent qu'un tiers du système entier.

**Maps of the strain and stress invariants.** (Adapted from [32]). Maps of dilation,  $\varepsilon$ , (a), shear strain,  $\gamma$ , (b), pressure,  $P$ , (c) and shear stress,  $\tau$ , (d), for  $\phi = 0.8294$  and  $a^* = 4.4 \times 10^{-2}$ . The uncolored grains sit below the pneumatic tube connected to the intruder, which masks the field of view.

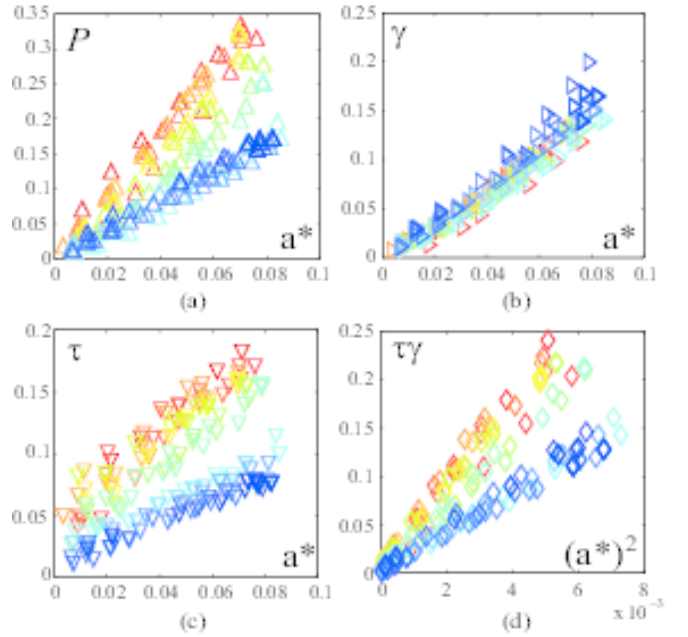


FIGURE 6. **Réponse au gonflement.** Moyennes spatiales des invariants de tenseurs en fonction du paramètre de gonflement  $a^*$ . (a) Pression  $P$ , (b) Cisaillement  $\gamma$ , (c) Contrainte de cisaillement  $\sigma$  et (d) puissance de travail des efforts de cisaillement  $\gamma\sigma$ . Le code couleurs s'échelonne de bleu pour les faibles fractions surfaciques à rouge pour les grandes fractions surfaciques.

**Response to inflation.** Spatial averaged of the tensors vs. the inflation parameter  $a^*$ . (a) Pressure  $P$ , (b) shear strain  $\gamma$ , (c) shear stress  $\sigma$  and (d) shear stress power  $\gamma\sigma$ . Color code spans from blue to red with increasing packing fractions.

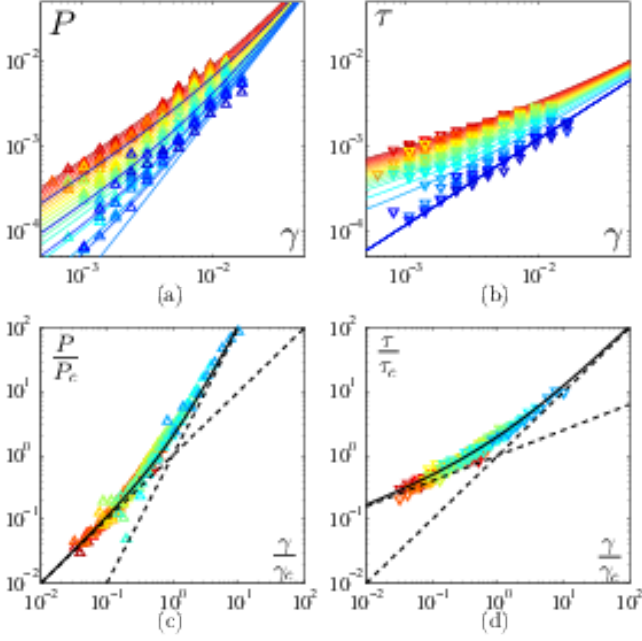


FIGURE 7. **Relations de comportement** (figure adaptée de [32]). Pression,  $P$  (a), et contrainte de cisaillement,  $\tau$  (b), en fonction du cisaillement  $\gamma$ , pour 21 fractions surfaciques  $\phi \in [0.8102 - 0.8343]$ . Les lignes pleines sont données par les équations (10-11). Le code couleurs s'échelonne de bleu pour les faibles fractions surfaciques à rouge pour les grandes fractions surfaciques. (c) et (d) : mêmes données que (a) et (b) normalisées par  $\gamma_c(\phi)$ ,  $P_c(\phi)$  et  $\tau_c(\phi)$ . Les lignes pleines sont données par la version normalisée des équations. (10-11) et les lignes en pointillés indiquent les régimes asymptotiques. **Constitutive laws.** (Adapted from [32]). Pressure,  $P$  (a), and shear stress,  $\tau$  (b), vs. shear strain,  $\gamma$ , for 21 packing fractions  $\phi \in [0.8102 - 0.8343]$ . The solid lines are given by Eqs. (10-11). Color code spans from blue to red with increasing packing fractions. (c) and (d) : same data as (a) and (b) rescaled by  $\gamma_c(\phi)$ ,  $P_c(\phi)$  and  $\tau_c(\phi)$ . The solid lines are given by the rescaled version of Eqs. (10-11) and the dashed lines indicate the asymptotic regimes.

avec  $\Delta\phi = \phi - \phi_J$ ,  $G_0 = 6.0 \pm 0.2 \times 10^{-2}$ ,  $R_0 = 1.2 \pm 0.1 \times 10^1$  et

$$R_{nl}(\Delta\phi, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{for } \phi < \phi_J \\ a\Delta\phi^\mu \gamma^{\alpha-2} & \text{for } \phi > \phi_J \end{cases},$$

$$G_{nl}(\Delta\phi, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{for } \phi < \phi_J \\ b\Delta\phi^\nu \gamma^{\beta-1} & \text{for } \phi > \phi_J \end{cases},$$

avec  $\mu = 1.7 \pm 0.1$ ,  $\alpha = 1.0 \pm 0.1$ ,  $a = 8.1 \pm 0.3 \times 10^{-2}$ ,  $\nu = 1.0 \pm 0.1$ ,  $\beta = 0.4 \pm 0.1$ ,  $b = 7.5 \pm 0.3 \times 10^{-1}$ . À partir de ces relations, on peut tracer deux courbes maîtresses présentées dans les figures 7c et d avec  $\gamma_c \sim \Delta\phi^\zeta$ ,  $\tau_c = 2G_0\gamma_c$  et  $P_c = R_0\gamma_c^2$ . Bien que les exposants ( $\mu, \alpha$ ) et ( $\nu, \beta$ ) aient été obtenus indépendamment, il est remarquable que  $\zeta = \mu/(2 - \alpha)$  et  $\zeta = \nu/(1 - \beta)$  conduisent à la même valeur  $\zeta = 1.7$ . Par conséquent, les données de  $P$  et  $\tau$  présentent un comportement non-linéaire similaire et peuvent être décrites de la même manière. Les équations (10-11) et les lois d'échelles associées sont des résultats clés de l'étude. Il est à noter que le régime

linéaire observé ici ne doit pas être confondu avec la réponse linéaire puisqu'elle se produit pour de grandes déformations. Nous expliquons la présence de ce nouveau régime par une saturation des non-linéarités. Nous pensons qu'un tel régime, qui existe aussi pour les empilements non bloqués, mérite une étude approfondie. Pour de petites déformations ( $\gamma \simeq 10^{-6}$ ), sondées dans les études numériques [4, 42] mais plus faibles que les plus petites déformations sondées dans l'expérience, on s'attend à retrouver la véritable réponse linéaire pour tout  $\Delta\phi > 0$  [25]. Pour des déformations du même ordre de grandeur que celles de l'expérience, des études numériques récentes ont rapporté l'existence d'un changement de régime : pour des déformations plus grandes, la réponse devient non-linéaire, avec un exposant  $\beta \simeq 0.5$  [43, 44], ce qui est compatible avec le régime non-linéaire observé ici. Dans de telles études, des particules avec un potentiel de déformation harmonique sont utilisées, *i.e.*  $P_0 = \Delta\phi$  et le croisement  $\gamma^* = P_0 = \Delta\phi^b$ , où  $b = 1$ . Ici, nos grains ne sont pas harmoniques et leur contact a un exposant  $b = 1.8$ . En outre, nous observons  $\gamma_c \sim \Delta\phi^\zeta$ , avec  $\zeta \approx b$ , ce qui induit  $\gamma_c \sim \gamma^*$ . Ces deux seuils sont différents, mais ils ont le même exposant, ce qui suggère qu'il se comportent de la même manière vis-à-vis de la transition de blocage. Cette étude préconise des investigations plus poussées, en particulier dans le régime non-linéaire, pour dévoiler le rôle des non-linéarités dans les lois de contact ainsi que celui de la friction entre grains. De plus, nous observons un rôle important de la dilatance dans nos grains cisailés, qui montrent que de tels effets non-linéaires doivent être pris en compte pour décrire complètement le matériau. L'importance de la dilatance dans les solides marginaux a récemment été mise en lumière dans [45], où il a été montré que le coefficient de Reynolds à volume constant  $R_V$  se comporte comme  $\Delta\phi^{-1/2}$ . Ici, nous reportons aussi un comportement singulier, mais qui concerne les propriétés non-linéaires et en particulier l'adoucissement de la dilatance. Dans un contexte un peu différent, Ren et al. [31] ont observé une très forte augmentation de la dilatance sous cisaillement homogène lorsque la transition de blocage est approchée par le dessous. La valeur du coefficient de dilatance mesuré ici est très grande ( $R_0 \sim 10^4$  N/m), et pourrait correspondre à une saturation de la divergence observée par Ren [31].

## VII. PROFILS DE DÉFORMATION

Nous procédons à une vérification de l'auto-cohérence du modèle en injectant les relations constitutives du modèle pour calculer les profils  $\gamma$  et les comparer aux mesures expérimentales. La géométrie axisymétrique assure que la distance au centre  $r$  de l'intrus est le seul paramètre d'espace dont dépend  $\epsilon$  et  $\sigma$ . Ainsi, en coordonnées cylindriques, les relations constitutives peuvent s'écrire sous la forme tensorielle



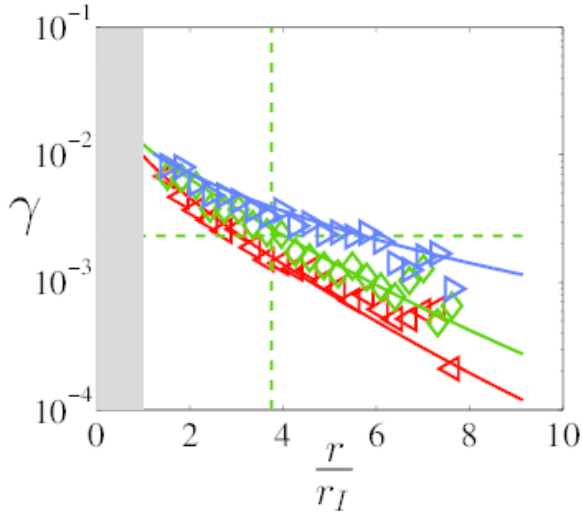


FIGURE 8. **Profils de cisaillement** (extraite de [32]). Profils de cisaillement pour ( $\triangleright$ ) ( $\phi = 0.8208$ ;  $a^* = 0.0374$ ), ( $\diamond$ ) ( $\phi = 0.8268$ ;  $a^* = 0.0314$ ) et ( $\triangleleft$ ) ( $\phi = 0.8338$ ;  $a^* = 0.0306$ ). Les marqueurs correspondent aux données expérimentales et les lignes pleines à l'intégration numérique de l'équation (12). La ligne verte pointillée indique le seuil ( $r_c, \gamma_c$ ) pour  $\phi = 0.8268$  et  $a^* = 0.0314$ . La zone grisée correspond à la zone occupée par le "ballon".

**Shear strain profiles** (Adapted from [32]). Shear strain profile for ( $\triangleright$ ) ( $\phi = 0.8208$ ;  $a^* = 0.0374$ ), ( $\diamond$ ) ( $\phi = 0.8268$ ;  $a^* = 0.0314$ ) and ( $\triangleleft$ ) ( $\phi = 0.8338$ ;  $a^* = 0.0306$ ). The symbols are experimental data and the solid lines come from the integration of eq.(12). The green dashed line indicates the crossover for the case ( $\phi = 0.8268$ ;  $a^* = 0.0314$ ).

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_c \left( \left( \frac{\gamma_c}{\gamma} \right)^\alpha + \left( \frac{\gamma_c}{\gamma} \right)^2 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \tau_c \left( \left( \frac{\gamma}{\gamma_c} \right)^\beta + \frac{\gamma}{\gamma_c} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Afin de simplifier, nous choisissons d'introduire la déformation de cisaillement réduite  $\tilde{\gamma} = \gamma/\gamma_c$ . La relation précédente devient

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_c (\tilde{\gamma}^\alpha + \tilde{\gamma}^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \tau_c (\tilde{\gamma}^\beta + \tilde{\gamma}) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'équilibre mécanique se traduit par  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , et conduit à

$$-P_c (\alpha \tilde{\gamma}^{\alpha-1} + 2\tilde{\gamma}) \frac{d\tilde{\gamma}}{dr} - \tau_c (\beta \tilde{\gamma}^{\beta-1} + 1) \frac{d\tilde{\gamma}}{dr} - 2\tau_c \frac{\tilde{\gamma}^\beta + \tilde{\gamma}}{r} = 0,$$

qui, par séparation des variables  $\tilde{\gamma}$  et  $r$ , peut être réécrit en

$$\frac{P_c (\alpha \tilde{\gamma}^{\alpha-1} + 2\tilde{\gamma}) + \tau_c (\beta \tilde{\gamma}^{\beta-1} + 1)}{\tilde{\gamma}^\beta + \tilde{\gamma}} d\tilde{\gamma} = -2\tau_c \frac{dr}{r}. \quad (12)$$

Nous intégrons numériquement l'équation 12 avec la condition limite  $\tilde{\gamma}(r = r_I) = a^*/\gamma_c$  et nous obtenons les profils tracés sur la figure 8, à laquelle nous avons ajouté les données expérimentales. L'accord est satisfaisant, étant donné qu'il n'y a aucun paramètre ajustable et que nous avons négligé le confinement à grand  $r$ . Ceci confirme que notre description des relations constitutives est cohérente.

## VIII. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons fourni une caractérisation quantitative de la réponse élastique d'un empilement 2D de grains proche de la transition de blocage au gonflement local d'un intrus. La géométrie particulière sonde la réponse à un cisaillement inhomogène à volume constant et peut être vue comme un analogue à symétrie cylindrique du problème de l'inclusion d'Eshelby. Cette étude pourrait ainsi trouver une analogie avec les problèmes de plasticité où les contraintes élastiques sont redistribuées par un événement plastique localisé [46, 47].

Nos résultats mettent en lumière l'effet de dilataance et dévoilent un régime non-linéaire au delà de la transition de blocage où le module de cisaillement et le module de dilataance diminuent jusqu'à ce qu'un nouveau régime linéaire apparaisse pour de grandes déformations. Cette étude montre l'existence d'un cisaillement critique  $\gamma_c$  qui sépare le régime non linéaire d'un régime linéaire saturé. Son comportement avec la distance au blocage est cohérent avec un autre croisement  $\gamma^*$ , récemment identifié lorsque l'élasticité passe du régime linéaire au régime non-linéaire [43], mais est tel que  $\gamma^* \ll \gamma_c$ . Enfin, notre étude fournit les fondations pour un modèle continu de tels matériaux. En particulier, l'observation du changement de réseau de contact est une observation clé pour pouvoir à terme obtenir une description micro-mécanique avec un formalisme de Cosserat [48].

**Remerciements** — Nous remercions B. Tighe, W. Ellenbroek et M. van Hecke pour des discussions importantes. Nous sommes très reconnaissants à V. Padilla et C. Wiertel-Gasquet pour l'assistance et le support technique. Ce travail est financé par le projet ANR STABIN-GRAM No. 2010-BLAN-0927-01 ainsi que par les projets REMIGS2D and COMIGS2D du RTRA Triangle de la Physique.

[1] P. Chaudhuri, L. Berthier, and S. Sastry, "Jamming transitions in amorphous packings of frictionless spheres occur over a continuous range of volume fractions," Phys.

Rev. Lett. **104**, 165701 (2010).

[2] A. J. Liu and S. R. Nagel, "Nonlinear dynamics : Jamming is not just cool any more," Nature **396**, 21–22



- (1998).
- [3] C. S. O'Hern, S. A. Langer, A. J. Liu, and S. R. Nagel, "Random packings of frictionless particles," *Phys. Rev. Lett.* **88**, 075507 (2002).
  - [4] C. S. O'Hern, L. E. Silbert, A. J. Liu, and S. R. Nagel, "Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder," *Phys. Rev. E* **68**, 011306 (2003).
  - [5] M. van Hecke, "Jamming of soft particles : geometry, mechanics, scaling and isostaticity," *J. Phys. : Condens. Matter* **22**, 033101 (2010).
  - [6] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud, and P. Claudin, "Jamming, force chains, and fragile matter," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1841–1844 (1998).
  - [7] M. Wyart, S. R. Nagel, and T. A. Witten, "Geometric origin of excess low-frequency vibrational modes in weakly connected amorphous solids," *EPL (Europhysics Letters)* **72**, 486 (2005).
  - [8] C. Goldenberg and I. Goldhirsch, "Friction enhances elasticity in granular solids," *Nature (London)* **435**, 188–191 (2005).
  - [9] J.-P. Bouchaud, P. Claudin, D. Levine, and M. Otto, "Force chain splitting in granular materials : A mechanism for large-scale pseudo-elastic behaviour," *The European Physical Journal E* **4**, 451–457 (2001).
  - [10] E. Kolb, C. Goldenberg, S. Inagaki, and E. Clément, "Reorganization of a two-dimensional disordered granular medium due to a small local cyclic perturbation," *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **7**, 17 (2006).
  - [11] P. Charbonneau, J. Kurchan, G. Parisi, P. Urbani, and F. Zamponi, "Fractal free energy landscapes in structural glasses," *Nature Communications* **5**, 3725 (2014), arXiv :1404.6809 [cond-mat.dis-nn].
  - [12] C. Rainone, P. Urbani, H. Yoshino, and F. Zamponi, "Following the evolution of hard sphere glasses in infinite dimensions under external perturbations : Compression and shear strain," *Phys. Rev. Lett.* **114**, 015701 (2015), arXiv :1411.0826 [cond-mat.soft].
  - [13] T. S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding, and R. P. Behringer, "Jamming transition in granular systems," *Phys. Rev. Lett.* **98**, 058001 (2007).
  - [14] C. Coulais, R. P. Behringer, and O. Dauchot, "Dynamics of the contacts reveals wisdom lines for jamming," *Europhys. Lett.* **100**, 44005 (2012).
  - [15] C. Coulais, R. P. Behringer, and O. Dauchot, "How the ideal jamming point illuminates the world of granular media," *Soft Matter* **10**, 1519–1536 (2014).
  - [16] G. Katgert and M. van Hecke, "Jamming and geometry of two-dimensional foams," *Europhys. Lett.* **92**, 34002 (2010).
  - [17] I. Jorjadze, L. Pontani, and J. Brujic, "Microscopic approach to the nonlinear elasticity of compressed emulsions," *Phys. Rev. Lett.* **110**, 048302 (2013).
  - [18] R. Candelier and O. Dauchot, "Journey of an intruder through the fluidization and jamming transitions of a dense granular media," *Phys. Rev. E* **81**, 011304 (2010).
  - [19] J. A. Dijksman, G. H. Wortel, L. TH van Dellen, O. Dauchot, and M. van Hecke, "Jamming, yielding, and rheology of weakly vibrated granular media," *Phys. Rev. Lett.* **107**, 108303 (2011).
  - [20] G. Katgert, B. P. Tighe, and M. van Hecke, "The jamming perspective on wet foams," *Soft Matter* **9**, 9739–9746 (2013).
  - [21] F. Scheffold, F. Cardinaux, and T. G. Mason, "Linear and nonlinear rheology of dense emulsions across the glass and the jamming regimes," *Journal of Physics : Condensed Matter* **25**, 502101 (2013).
  - [22] A. Fall, B. Weber, M. Pakpour, N. Lenoir, N. Shahidzadeh, J. Fiscina, C. Wagner, and D. Bonn, "Sliding friction on wet and dry sand," *Phys. Rev. Lett.* **112**, 175502 (2014).
  - [23] C. F. Schreck, T. Bertrand, C. S. O'Hern, and M. D. Shattuck, "Repulsive contact interactions make jammed particulate systems inherently nonharmonic," *Phys. Rev. Lett.* **107**, 078301 (2011).
  - [24] T. Bertrand, C. F. Schreck, C. S. O'Hern, and M. D. Shattuck, "Hypocoordinated solids in particulate media," *Phys. Rev. E* **89**, 062203 (2014).
  - [25] C. P. Goodrich, A. J. Liu, and S. R. Nagel, "Contact nonlinearities and linear response in jammed particulate packings," *Phys. Rev. E* **90**, 022201 (2014).
  - [26] E. Lerner, G. During, and M. Wyart, "Low-energy nonlinear excitations in sphere packings," *Soft Matter* **9**, 8252–8263 (2013).
  - [27] C. Brito, O. Dauchot, G. Biroli, and J.P. Bouchaud, "Elementary excitation modes in a granular glass above jamming," *Soft Matter* **6**, 3013–3022 (2010).
  - [28] L. R. Gomez, A. M. Turner, M. van Hecke, , and V. Vitelli, "Shocks near jamming," *Phys. Rev. Lett.* **108**, 058001 (2012).
  - [29] O. Reynolds, "Lvii. on the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. with experimental illustrations," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **20**, 469–481 (1885).
  - [30] D. Bi, J. Zhang, B. Chakraborty, and R. P. Behringer, "Jamming by shear," *Nature* **480**, 355–358 (2011).
  - [31] J. Ren, J. A. Dijksman, and R. P. Behringer, "Reynolds pressure and relaxation in a sheared granular system," *Physical review letters* **110**, 018302 (2013).
  - [32] C. Coulais, A. Seguin, and O. Dauchot, "Shear modulus and dilatancy softening in granular packings above jamming," *Phys. Rev. Lett.* **113**, 198001 (2014).
  - [33] G. Huillard, X. Noblin, and J. Rajchenbach, "Propagation of acoustic waves in a one-dimensional array of noncohesive cylinders," *Phys. Rev. E* **84**, 016602 (2011).
  - [34] K. L. Johnson, *Contact mechanics* (Cambridge university press, 1987).
  - [35] C. Coulais, *Dense Vibrated Granular Media : From Stuck Liquids to Soft Solids*, Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2012).
  - [36] A. Drescher and G. de Josselin de Jong, "Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material," *J. Mech. Phys. Solids* **20**, 337 – 340 (1972).
  - [37] P.A. Cundall, A. Drescher, and O.D.L Strack, *Proc. IU-TAM* , 355–370 (1982).
  - [38] B. Cambou, M. Chaze, and F. Dedecker, "Change of scale in granular materials," *European Journal of Mechanics - A/Solids* **19**, 999 – 1014 (2000).
  - [39] P-P Cortet, D Bonamy, F Daviaud, O Dauchot, B Du-brulle, and M Renouf, "Relevance of visco-plastic theory in a multi-directional inhomogeneous granular flow," *Europhys. Lett.* **88**, 14001 (2009).
  - [40] E. Somfai, M. van Hecke, W. G. Ellenbroek, K. Shundyak, and W. van Saarloos, "Critical and noncritical jamming of frictional grains," *Phys. Rev. E* **75**, 020301 (2007).
  - [41] C. P. Goodrich, S. Dagois-Bohy, B. P. Tighe, M. van

- Hecke, A. J. Liu, and S. R. Nagel, “Jamming in finite systems : Stability, anisotropy, fluctuations, and scaling,” *Phys. Rev. E* **90**, 022138 (2014).
- [42] S. Dagois-Bohy, B. P. Tighe, J. Simon, S. Henkes, and M. van Hecke, “Soft-sphere packings at finite pressure but unstable to shear,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 095703 (2012).
- [43] B. Tighe, Priv. comm.
- [44] M. Otsuki and H. Hayakawa, “Avalanche contribution to shear modulus of granular materials,” *Phys. Rev. E* **90**, 042202 (2014).
- [45] B. P. Tighe, “Shear dilatancy in marginal solids,” *Granular Matter* **16**, 203–208 (2014).
- [46] M. Talamali, V. Petäjä, D. Vandembroucq, and S. Roux, “Path-independent integrals to identify localized plastic events in two dimensions,” *Phys. Rev. E* **78**, 016109 (2008).
- [47] M. Tsamados, A. Tanguy, C. Goldenberg, and J.L. Barrat, “Local elasticity map and plasticity in a model lennard-jones glass,” *Physical Review E* **80**, 026112 (2009).
- [48] E. Cosserat and F. Cosserat, *Théorie des corps déformables* (Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909).